10 Излучение абсолютно черного тела. Закон Планка

Исключительная по значимости роль термодинамики и статистической физики в рождении квантовой теории проявилась при решении фундаментальной задачи о тепловом равновесии вещества и излучения. Задачу о нахождении универсальной функции, характеризующей отношение излучательной и поглощательной способностей тела, сформулировал Г. Кирхгоф (1860). Решением этой задачи и была формула для спектральной плотности излучения абсолютно черного тела, полученная М. Планком (1900) на основе представления о дискретности энергии осциллятора и существовании универсальной постоянной $\hbar$ – кванта действия.

10.1 Задача Кирхгофа

Излучательной способностью тела e называют количество энергии, излученной телом с единичной площади за 1 с. Пусть на тело падает поток излучения I_ω в спектральном интервале ω, $\omega + d\omega$, часть которого (I^a_ω) поглощается, часть (I^r_ω) отражается и часть (I^d_ω) проходит через тело. Тогда

$$\frac{I^a_\omega}{I_\omega} + \frac{I^r_\omega}{I_\omega} + \frac{I^d_\omega}{I_\omega} = a + r + d = 1,$$

где a – коэффициент поглощения (поглощательная способность); r – коэффициент отражения; d – коэффициент прозрачности тела.

В состоянии теплового равновесия тело излучает столько же энергии, сколько поглощает: $e = aI_\omega$. Если $a = 0,\ r = 0,\ d = 1,$ то тело называют абсолютно прозрачным (в данном спектральном интервале); при $a = 0,\ r = 1,\ d = 0$ – абсолютным зеркалом; и наконец, если $a = 1,\ r = 0,\ d = 0$, то тело называют абсолютно черным (понятие, введенное Кирхгофом).

Рассмотрим две бесконечные плоские пластины A_1 и A_2 с идеально зеркальными и теплоизолированными внешними сторонами, расположенными параллельно на некотором расстоянии друг от друга. Их излучательные и поглощательные способности обозначим соответственно e_1, a_1 и e_2, a_2. Процесс установления теплового равновесия пластин и излучения между ними можно представить следующим образом: из интенсивности e_1, излученной телом A_1, тело A_2 поглотит a_2e_1 и отразит $(1-a_2)e_1$. Тело же A_1 поглотит $a_1(1-a_2)e_1$, и отразит $(1-a_1)(1-a_2)e_1$; в свою очередь, тело A_2 поглотит $a_2(1-a_1)(1-a_2)e_1$ и т. д. То же самое можно сказать и о той части излучения e_2, которая испускается телом A_2 : после отражения от A_1 возвращается к A_2 $(1-a_1)e_2$, поглощается $a_2(1-a_1)e_2$ и т. д. Суммируем эти геометрические прогресии:

$$I_\omega^{a_2} = a_2\left[e_1 + (1-a_1)e_2\right]\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{a_2e_1 + (1-a_1)e_2a_2}{1-q}, \qquad (1)$$

где знаменатель прогресии $q = (1-a_1)(1-a_2)$.

Подставляя (1) в условие теплового равновесия $e_2 = I_\omega^{a_2}$ тела A_2, найдем:

$$e_2 = a_2\frac{e_1 + (1-a_1)e_2}{1-(1-a_1)(1-a_2)},$$

откуда получим закон Кирхгофа $e_2/a_2 = e_1/a_1$.

Итак, закон Кирхгофа говорит о том, что отношение излучательной способности тела к его поглощательной способности является некоторой универсальной (не зависящей от тела) функцией, зависящей только от ω и Т. Выбирая в качестве A_1 абсолютно черное тело ($\mathrm{a}_1 = 1$), закон Кирхгофа можно записать в виде утверждения

$$\frac{e}{a} = e_0(\omega, T), \qquad (2)$$

где $e_0(\omega, T)$ – излучательная способность абсолютно черного тела.

10.2 Фотон как квант электромагнитного поля

Уравнения Максвелла для свободного электромагнитного поля имеют вид (в гауссовой системе единиц):

$$\mathrm{rot}\vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathcal{H}}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\vec{\mathcal{H}} = 0;$$

$$\mathrm{rot}\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathcal{E}}}{\partial t}, \ \mathrm{div}\vec{\mathcal{E}} = 0. \qquad (3)$$

Введем 4-потенциал $A \equiv (\vec{\mathcal{A}}, \varphi)$, через который можно выразить $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$:

$$\vec{\mathcal{E}} = -\mathrm{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t},\ \vec{\mathcal{H}} = \mathrm{rot}\vec{\mathcal{A}}, \tag{4}$$

$\vec{A}$ и φ определяются неоднозначно – с точностью до калибровочных преобразований $\vec{\mathcal{A}} \to \vec{\mathcal{A}}' = \vec{\mathcal{A}} + \mathrm{grad}\chi$, $\varphi \to \varphi' = \varphi - \partial\chi/\partial t$, поэтому $\vec{A}$ доопределяют, например, кулоновской калибровкой $\mathrm{div}\vec{\mathcal{A}} = 0$.

Используя (4) и (3), получим волновые уравнения

$$\Box\vec{\mathcal{A}} = 0,\ \Box\vec{\mathcal{E}} = 0,\ \Box\vec{\mathcal{H}} = 0, \tag{5}$$

где $\Box \equiv \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ – оператор Даламбера. Частным решением (5) является плоская монохроматическая волна

$$\vec{\mathcal{A}}_{k\alpha} = \frac{1}{\sqrt{V}}\vec{e}_{k\alpha}\exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}),\ \text{где}\ \vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}\ -$$

волновой вектор ($\vec{n}$ – единичный вектор, определяющий направление распространения волны); $\vec{e}_{k\alpha}$ – единичный вектор поляризации волны, определяющий направление колебаний вектора $\vec{A}$ (а следовательно, и $\vec{E}$). Из условия $\mathrm{div}\vec{\mathcal{A}} = 0$ следует условие поперечности электромагнитного поля $\vec{k}\vec{\mathcal{A}}_{k\alpha} = 0$, $\vec{k}\vec{e}_{k\alpha} = 0$, т. е. имеются только две независимые поляризации плоской волны $\alpha = 1, 2$ в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Волна называется линейно поляризованной, если направление остается постоянным. Например, для волны, распространяющейся в направлении OZ, поляризация вдоль оси X и вдоль Y задается соответственно вектором

$$\vec{e}_{k1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{e}_{k2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Суперпозиция двух линейных поляризаций с $|\vec{\mathcal{A}}_{k1}| \neq |\vec{\mathcal{A}}_{k2}|$ дает право- или левоэллиптическую поляризацию:

$$\vec{e}_{kR} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix},\ \vec{e}_{kL} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix};$$

если $|\vec{\mathcal{A}}_{k1}| = |\vec{\mathcal{A}}_{k2}|$, то соответствующие поляризации называют круговыми или циркулярными.

Общее решение волнового уравнения (5) является суперпозицией плоских монохроматических и поляризованных электромагнитных волн:

$$\vec{\mathcal{A}} = \sum_{k,\alpha} \left[\vec{a}_{k\alpha}(t) \exp(i\vec{k}\vec{r}) + \vec{a}^*_{k\alpha}(t) \exp(-i\vec{k}\vec{r}) \right], \tag{6}$$

где $\vec{a}_{k\alpha}(t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \vec{e}_{k\alpha} \exp(-i\omega t)$, а $\vec{k} = \vec{k}_\nu$ принимает дискретные значения для электромагнитного поля в ящике объемом $V = L_1 L_2 L_3$. Используя периодические граничные условия – вдоль каждого ребра параллелепипеда V должно укладываться целое число длин волн, получим $L_i/\lambda_i = \nu_i$, $(i = 1, 2, 3)$. И так как $k_i = 2\pi/\lambda_i$, то $k_i = (2\pi/L_i)\nu_i$, $\vec{\nu} \equiv (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. Условие нормировки для $\vec{\mathcal{A}}_{k\alpha} = \vec{a}_{k\alpha}(t) \exp(i\vec{k}\vec{r})$ имеет вид

$$\int \vec{\mathcal{A}}^*_{k'\alpha'} \vec{\mathcal{A}}_{k\alpha} d^3 r = \frac{1}{V} \int \vec{e}^*_{k'\alpha'} \vec{e}_{k\alpha} \exp\left[i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{r} \right] d^3 r = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{kk'}.$$

(Мы использовали нормировку $\int \exp\left[i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{r} \right] d^3 r = V \delta_{kk'}$, и ортогональность векторов поляризации $\vec{e}_{k\alpha'} \vec{e}_{k\alpha} = \delta_{\alpha\alpha'}$.)

Если L_i достаточно велики, то соседние значения волновых чисел близки – $\triangle k = 2\pi/L \to 0$, поэтому от суммирования по k в (6) можно перейти к интегрированию по рецепту

$$\sum_k \equiv \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3} \to \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k, \quad \sum_{k,\alpha} \to \frac{gV}{(2\pi)^3} \int d^3 k,$$

где $g = 2$ – число независимых поляризаций каждой волны.

Таким образом, число различных монохроматических волн в интервале $(\vec{k}, \vec{k} + d\vec{k})$ и в интервале абсолютных значений $(k, k + dk)$ есть соответственно

$$\tilde{D}(\vec{k}) d^3 k = \frac{gV}{(2\pi)^3} d^3 k, \quad (g = \sum_\alpha 1 = 2)$$

$$D(k) dk = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \tilde{D}(\vec{k}) k^2 dk \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{4\pi g V k^2}{(2\pi)^3} dk.$$

Переходя к циклической частоте $\omega = ck$, найдем число плоских волн в диапазоне частот $(\omega, \omega + d\omega)$

$$D(\omega)d\omega = 2\frac{4\pi V\omega^2}{(2\pi)^3 c^3}d\omega = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}d\omega. \tag{7}$$

Введем канонические переменные электромагнитного поля:

$$\vec{q}_{k\alpha} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}(\vec{a}_{k\alpha} + \vec{a}^*_{k\alpha}),\ \vec{p}_{k\alpha} \equiv \dot{\vec{q}}_{k\alpha} = \frac{-i\omega}{\sqrt{4\pi}}(\vec{a}_{k\alpha} - \vec{a}^*_{k\alpha}), \tag{8}$$

и перепишем (6) в этих переменных:

$$\vec{\mathcal{A}}_{k\alpha} = \sqrt{4\pi}\sum_{k,\alpha}\left[\vec{q}_{k\alpha}\cos(\vec{k}\vec{r}) - \frac{1}{\omega}\vec{p}_{k\alpha}\sin(\vec{k}\vec{r})\right].$$

Вычисляя $\vec{E}$, $\vec{\mathcal{H}}$ по формулам (4) и подставляя в выражение для полной энергии поля $(1/8\pi \int(\vec{E}^2 + \vec{\mathcal{H}}^2)d^3r$, получим функцию Гамильтона электромагнитного поля

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k,\alpha}(p^2_{k\alpha} + \omega^2 q^2_{k\alpha}). \tag{9}$$

Это выражение – в точности функция Гамильтона системы бесконечного числа несвязанных одномерных гармонических осцилляторов. Каждый такой осциллятор соответствует плоской монохроматической волне с определенным волновым вектором $\vec{k}$ и поляризацией $\vec{e}_{k\alpha}$.

Таким образом, задача квантования электромагнитного поля сводится к задаче квантования гармонического осциллятора. Поэтому для спектра энергии и импульса поля можно записать ответ

$$E = \sum_{k,\alpha} n_{k\alpha}\hbar\omega,\ \vec{P} = \sum_{k,\alpha} n_{k\alpha}\hbar\vec{k}, \tag{10}$$

(Мы здесь не останавливаемся на проблеме бесконечной энергии электромагнитного поля: суммарная энергия основного состояния бесконечного числа осцилляторов $(1/2)\sum\limits_{k,\alpha}\hbar\omega_k = \infty$; отсчет энергии в (10) ведется от основного состояния.)

Формулы (10) позволяют говорить о квантах электромагнитного поля или фотонах (Эйнштейн, 1909), т. е. частицах, энергия и импульс которых определяются соотношениями $\varepsilon = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. Так как $\omega = ck$, то связь энергии и импульса фотона $\varepsilon = pc$ говорит нам о том, что фотон – частица с нулевой массой. Числа заполнения $n_{k\alpha}$ теперь имеют смысл числа фотонов с импульсом $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ и определенной проекцией спина, связанной с поляризацией α. Два значения проекции спина фотона, отвечающие двум независимым поляризациям плоской волны, говорят нам о том, что его спин равен 1, и фотон является бозе–частицей. Проекции спина на направление импульса, равной $+1$, соответствует правокруговая поляризация плоской монохроматической волны; проекции, равной -1, – левокруговая поляризация. Кратность вырождения g_s по спину для фотона равна 2. Для свободного электромагнитного поля не существует фотона с равной нулю проекцией спина на направление импульса.

10.3 Идеальный газ фотонов

Итак, равновесное электромагнитное излучение или излучение абсолютно черного тела можно рассматривать как идеальный газ фотонов, находящихся в объеме V при температуре T. Особенность такого газа в том, что тепловое равновесие устанавливается за счет поглощения и испускания фотонов веществом. Поэтому полное число фотонов не является фиксированным, а определяется из условия устойчивости равновесия; для параметров T, V – это условие минимума свободной энергии: $(\partial F/\partial N)_{T,V} = 0$. Но производная $(\partial F/\partial N)_{T,V}$ определяет химический потенциал газа, поэтому для фотонного газа $\mu = 0$.

Среднее число фотонов $\langle n_{k\alpha}\rangle$ в состоянии $(\vec{k},\alpha)$ находим по формуле распределения Бозе-Эйнштейна

$$\langle n_{k\alpha}\rangle = \frac{1}{\exp(\beta\varepsilon_{k\alpha}) - 1} = \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega_k) - 1}. \tag{11}$$

Считая спектр фотонных состояний непрерывным (в пределе $V \to \infty$), найдем число состояний с энергиями фотона $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$:

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{V\varepsilon^2}{\pi^2 c^3 \hbar^3} d\varepsilon \tag{12}$$

или, переходя к частотам $\omega = \varepsilon/\hbar$, получим выражение, совпадающее с соответствующим классическим результатом (7):

$$D(\omega)d\omega = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega. \tag{13}$$

Заметим, что если бы мы опирались на теорему о равнораспределении энергии по степеням свободы, то каждая волновая (осцилляторная) степень свободы (7) дала бы вклад kТ и суммарная энергия излучения была бы расходящейся величиной:

$$E = kT \int\limits_0^\infty D(\omega)d\omega = \infty.$$

Этот результат, полученный в рамках классического статистического описания, заставил в свое время усомниться в возможности применения теоремы о равнораспределении энергии в области высоких частот (Рэлей, 1900).

Используя (11) и (13), запишем выражение для энергии газа, приходящейся на спектральный интервал $d\omega$:

$$dE_\omega = \hbar\omega \langle n(\omega) \rangle D(\omega) d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega^3}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} d\omega. \tag{14}$$

Разделив (14) на V и $d\omega$, получим спектральную плотность энергии равновесного излучения

$$u(\omega, T) \equiv \frac{1}{V}\frac{dE_\omega}{d\omega} = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega^3}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}. \tag{15}$$

Это и есть знаменитый "закон распределения энергии в нормальном спектре излучения" – закон Планка. Функция $e_0(\omega, T)$ закона Кирхгофа (2) связана с $u(\omega, T)$ соотношением

$$e_0(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T). \tag{16}$$

Докажем (16). Запишем выражение для энергии в спектральном интервале $d\omega$, излученной черным телом за время Δt с площадки S под углом θ к нормали этой площадки в элемент телесного угла $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$:

$$dE_\omega^{\theta,\varphi} = \Delta V_\theta u(\omega, T)\frac{d\Omega}{4\pi}d\omega, \tag{17}$$

где $\Delta V_\theta = c\Delta t S\cos\theta$ – объем косого цилиндра, который заполняют за время Δt излученные фотоны. Излучательную способность – плотность потока излучения, отнесенную к спектральному интервалу $d\omega$, получим, проинтегрировав (17) по всем направлениям вперед и разделив результат на $\Delta t S d\omega$:

$$\begin{aligned} e_0(\omega, T) &= \frac{1}{4\pi c\Delta t S}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\Delta V_\theta u(\omega, T)\sin\theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{c}{4\pi}u(\omega, T)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{c}{4}u(\omega, T). \end{aligned}$$

10.4 Уравнение состояния фотонного газа

Пользуясь тем же приемом, что и в лекции 9, можно показать, что для газа фотонов

$$P = \frac{1}{3}\frac{U}{V}. \tag{18}$$

Внутреннюю энергию газа найдем, непосредственно интегрируя (14):

$$U = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3}\int\limits_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} = \frac{V(kT)^4}{\pi^2\hbar^3 c^3}\int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp x - 1}\ . \tag{19}$$

Интегралы вида $I_n = \int\limits_0^\infty \frac{x^n dx}{\exp x - 1}$ вычислим с помощью приема лекции 9:

$$I_n = \int\limits_0^\infty \frac{x^n dx}{\exp x - 1} = \Gamma(n+1)\sum_{\ell=1}^\infty \frac{1}{\ell^{n+1}} = \Gamma(n+1)\zeta(n+1).$$

В частности,

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},\ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90},\ \zeta(3) \approx 1,202,\ \zeta(5) \approx 1,037;$$

$$I_3 = \Gamma(4)\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}.$$

Подставляя последнее в (19), получим закон Стефана – Больцмана

$$U = V\sigma T^4, \tag{20}$$

где $\sigma = \pi^2 k^4/15(\hbar c)^3 = 7,56 \cdot 10^{-15}$ эрг $\cdot$ см$^{-3} \cdot$ К$^{-4}$ – постоянная Стефана – Больцмана.

Поскольку для системы с $\mu = 0$ $\;J = F = -PV = -U/3$, то

$$S = \frac{U - F}{T} = \frac{4}{3}\sigma T^3 V. \tag{21}$$

Энтропия фотонного газа удовлетворяет закону Нернста: $S \underset{T\to 0}{\longrightarrow} 0$.

10.5 Два классических предела закона Планка

Рассмотрим предельные случаи формулы (15).

Классический волновой предел

$$\hbar\omega/kT \ll 1, \;\; \exp(\hbar\omega/kT) - 1 \simeq \hbar\omega/kT,$$

$$u(\omega, T) \simeq \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT \;\; - \;\; \text{формула Рэлея – Джинса.} \tag{22}$$

Это длинноволновый предел закона Планка (он же – высокотемпературный). Распространение закона (22) на область высоких частот приводит к уже упомянутой в п. 3 расходимости, которую Джинс назвал "ультрафиолетовой катастрофой", и на этом основании сделал вывод о невозможности теплового равновесия для излучения. Но вывод этот был сделан в 1905 г., когда оснований для такой радикальности уже не осталось, так как к тому времени Планком был получен закон Планка.

Классический корпускулярный предел

$$\hbar\omega/kT \gg 1, \;\; [\exp(\hbar\omega/kT) - 1]^{-1} \simeq \exp(-\hbar\omega/kT),$$

$$u(\omega, T) \simeq \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - \;\; \text{формула Вина.} \tag{23}$$

Этот высокочастотный предел отвечает больцмановскому приближению для частиц с энергией $\varepsilon = pc$ и плотностью состояний $D(\varepsilon)$ (12). Формула Вина (1896) удовлетворительно описывает экспериментальные данные в области малых длин волн.

[Покажите, что в случае (23) выполняется закон равнораспределения энергии по степеням свободы.]